შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 355

ამოცანა № 1

გვერდი № 3

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+\dots+\frac{1}{2012\sqrt[3]{2011}}<3.$

ცნობილია დადებითი რიცხვების საშუალო არითმეტიკული ნაკლებია ან ტოლია ამ რიცხვების საშუალო კვადრატულზე, ამიტომ:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\dots+\frac{1}{2012\sqrt[3]{2011}}\le 2011\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{2^2\cdot 1^{\frac{2}{3}}}+\dots+\frac{1}{(k+1)^2\cdot k^{\frac{2}{3}}}+\dots+\frac{1}{2012^2\sqrt[3]{2011^2}}}{2011}}=$

$\Rightarrow$ უ.დ. რომ: $\frac{1}{2^2\cdot 1^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{3^2\cdot 2^{\frac{2}{3}}}+\dots+\frac{1}{2012^2\cdot 2011^{\frac{2}{3}}}<\frac{9}{2011}.$

ცნობილია $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, ამიტომ:

უ.დ. რომ: $\frac{1}{2^2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{3^2\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{2012^2\sqrt{2011}}<\frac{9}{2011}$ (*)

. . .

და (*) უტოლობის გამარტივებით დავალთ იგივეობამდე, ანუ საწყისი დასამტკიცებელი უტოლობა ჭეშმარიტი გვექნება.

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

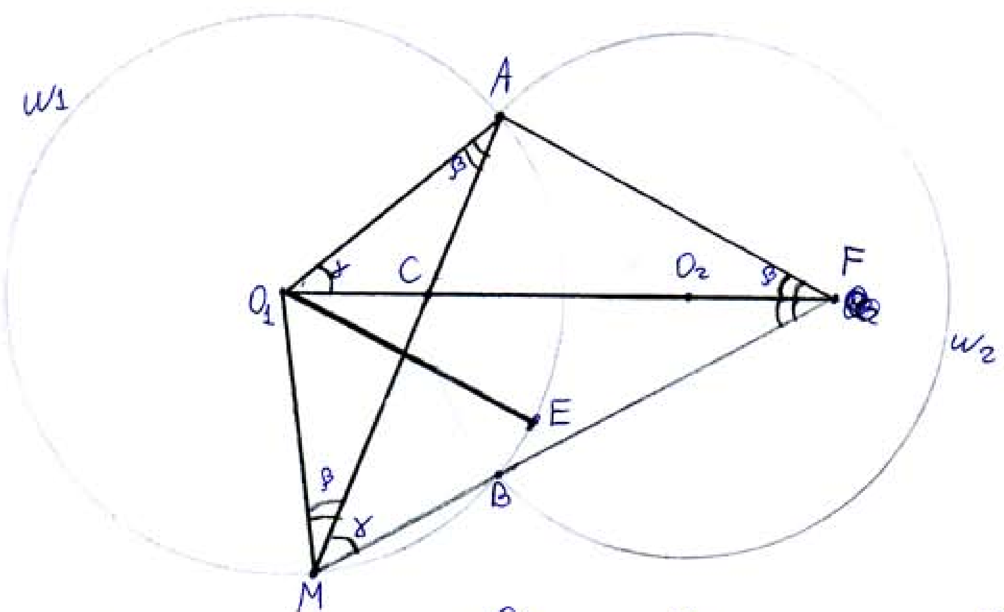
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 355

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



განვიხილოთ $\triangle O_1AO_2$ და $\triangle O_1BO_2$: $O_1A=O_1B, O_2A=O_2B, O_1O_2$-საერთო ანუ $\triangle O_1AO_2=\triangle O_1BO_2 \Rightarrow \angle AO_1F=\angle BO_1F \Rightarrow \angle AO_1F=\frac{\angle AO_1B}{2}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}=\angle AMB$, ანუ $\underline{\angle AO_1F=\angle AMF\equiv\alpha}$. ამასთან $\angle O_1CA=\angle MCF \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{\angle O_1AM=\angle O_1FM\equiv\beta}$, ამიტომ $\underline{O_1AFM}$ ციკლურია. $O_1M=O_1A \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle O_1AM=\angle O_1MA$, მეორე ოთხკუთხედის ციკლურობიდან: $\angle O_1MA=\angle O_1FA \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle O_1AM=\angle O_1FA$. მაშასადამე $\angle O_1AC=\angle CFA=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow O_1A$ $\triangle ACF$-ზე შემოხაზული ω_3 წრეწირის მხებია. რადგან $O_1A=O_1E$ და $E\in\omega_3$, მაშასადამე O_1E აგრეთვე ω_3 მხებია.

რ. დ. გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	01.05.2011/ მათ/ IV/ 355

ამოცანა № 3 | გვერდი № 2

$f(f(n))=n+2011$, $n\geq 0$ და მთელია. აქედან კი:

$f(f(f(n)))=f(n+2011)$ და $f(f(f(n)))=f(n)+2011$, ანუ:

$f(n+2011)=f(n)+2011$. (1). ვთქვათ $r\geq 0$ და მთელი,

მაშინ: $f(r+2011)=f(r)+2011$; $f(r+2\cdot 2011)=f(r+2011)+2011=f(r)+2011\cdot 2$,

ანუ თუ $k,r\in N_0$, მაშინ:

$f(2011k+r)=f(r)+2011k$ (2).

(1) და (2) ფორმულებიდან აშკარაა ჩანს რომ $f(x)$ ფუნქცია უნდა იყოს შემდეგი სახის: $f(x)=x+t$, $t\in Z$, თუ $f(x)$ პოლინომიალურია, და ამასთან არ შეიძლება იყოს დამოკიდებული ლუწობაზე, მაგ. ნაშთზე და ა.შ.

მაშინ $f(f(n))=f(n+t)+t=n+2t=n+2011$, მაგრამ 2011 კენტი რიცხვია, მაშასადამე არ არის $f(x)$ ფუნქცია, რომ: $f(f(x))=x+2011$, $x\in N_0$, არ არსებობს 2011-ის კენტობის გამო.

რ.დ.გ.